№ 8 дәріс

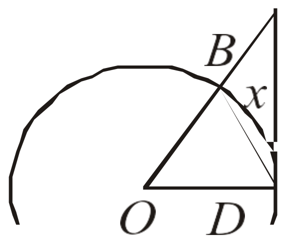
І және ІІ тамаша шектер. Функцияларды салыстыру.

1. Бірінші тамаша шек $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Мұны "$\varepsilon-\delta$" тіліндегі Коши анықтамасы көмегімен дәлелдейік. Ең алдымен, егер $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ болса, онда

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \tag{1}$$

теңсіздіктерінің орындалатынын дәлелдейік. Мұндағы $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ функциялары жұп болғандықтан, $0<x<\frac{\pi}{2}$ жағдайын ғана қарастыру жеткілікті. Суретте көрсетілген бір бұрышы x радианға тең болатын ОВА үшбұрышы, ОВА секторы және ОСА тікбұрышты үшбұрышының аудандары



1-сурет.

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$$

қатынасында болатыны айқын. Бұл теңсіздіктерден $\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$, ал одан (1) дәлелдеуі шығады. Енді (1) теңсіздіктерді (-1)-ге көбейтсек, $-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$, ал оған 1-ді қосып, $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$ теңсіздіктерін алып, оның оң жағының

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\frac{x}{2} = x$$

екенін байқап, әрбір $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ үшін

$$1 - |x| < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{2}$$

теңсіздіктерінің орындалатынын көреміз.

Кез-келген $0 < \varepsilon < 1$ санына сәйкес $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ деп алсақ, онда $0 < |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ болғанда (2) бойынша

$$1 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 1$$

ал бұл $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ деген сөз.

2. Екінші тамаша шек

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3}$$

Мұны тізбектер тіліндегі Гейне анықтамасы көмегімен дәлелдейік. Біз тізбектер теориясында

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

деп e санын енгізгенбіз. Онда оң бүтін сандардан құрылған кез-келген өспелі $\{n_k\}$ тізбегі үшін де

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{4}$$

$\left(\quad 1\right)^n$ ε

Шынында да, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{}{n}\right) = e$ болғандықтан, кезкелген > 0 саны үшін N саны табылып, барлық $n > \mathrm{N}$ үшін

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - e\right| < \varepsilon \ ,$$

ал $n_k \to +\infty$ ұмтылатын болғандықтан, барлық $k > \mathrm{N}$ үшін $n_k > \mathrm{N}$. Сондықтан, $k > \mathrm{N}$

болғанда

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n_k} \right)^{n_k} - e \right| < \varepsilon .$$

Демек, (4) орындалады.

Енді

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \tag{5}$$

екенін көрсетейік.

Онда тізбек тіліндегі Гейне анықтамасы бойынша, әрбір $+\infty$-ке ұмтылатын $\{x_k\}$ тізбегі үшін $\left\{\left(1+1/x_k\right)^{x_k}\right\}$ сәйкес тізбегінің e санына ұмтылатынын көрсетуіміз керек. Айталық, $\{x_k\}$ дәл сондай тізбек, ал әрбір мүшесі үшін одан аспайтын ең үлкен бүтін сан n_k, яғни $n_k < x_k < n_{k+1}$ болсын. Сонда

$$1+\frac{1}{n_{k+1}}\le 1+\frac{1}{x_k}\le 1+\frac{1}{n_k} \text{ және } \left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k}\le\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\le\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}}.$$

Бұлардың оң жақ және сол жағындағы шектер мәндері бірдей e санына ұмтылады. Шынында да,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_{k+1}}}{1+\frac{1}{n_{k+1}}}=e,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e.$$

Мұнан (II-т. § 4, 1-теорема, в)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e,$$

яғни (5) теңдік дәлелденді.

Енді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \tag{6}$$

теңдігін дәлелдейік.

Егер x_k шегі $-\infty$ болатын тізбек болатын болса, онда $y_k=-x_k$ тізбегінің шегі $+\infty$ болады. Сонда

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=\left(\frac{1+y_k-1}{y_k-1}\right)^{y_k}=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)$$

$$x_k \qquad y_k \qquad .$$

Мұнан шекке көшсек,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)=e\cdot 1=e,$$

яғни (5) және (6) теңдіктерден

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

шығады.

Функцияларды салыстыру

$f : E \to \mathrm{R}$ және $g : E \to \mathrm{R}$ функциялары беріліп, ал a осы функциялардың анықталу аймағы E жиынының шектік нүктесі болсын. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ болса, онда a нүктесінің маңайында $f(x)$ функциясын шексіз аз деп атайтынымызды біз жоғарыда айтқанбыз. Егер $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ болса, онда a нүктесінің маңайыда $f(x)$ функциясының аздық реті $g(x)$ функциясына қарағанда жоғарырақ деп айтады да $f(x) = o(g(x))$ арқылы жазады. Мұны "$g(x)$-тен o кіші" деп оқиды. Егер a нүктесінің маңайында $C > 0$ саны табылып, $|f(x)| < C|g(x)|$ теңсіздігі орындалса, онда a нүктесінің маңайында $f(x)$ функциясын $g(x)$ функциясымен салыстырғанда шектеулі деп айтады да $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, деп жазады. Мұны "$g(x)$-тен O үлкен" деп оқиды. Егер $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ болса, онда a нүктесінің маңайында $f(x)$ және $g(x)$ функцияларын эквивалентті деп айтып, $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$, арқылы жазады. Мұндай o және O белгілеулерін Ландау белгілеулері немесе Ландау символдары деп айтады.

Мысалдар.

1. $x + x^2 = O(x^2), x \to \infty.$

2. $x + x^2 = O(x^2), x \to 0.$

3. $\sin x = O(1), x \to \infty$

4. $\sin x = O(x), x \to 0$

5. $x = O(\sin x), x \to 0.$

6. Алдынғы екі мысалдан $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, яғни $\sin x \sim x, x \to 0$.

7. $x = o(x^2), x \to \infty.$

8. $x^2 = o(x), x \to 0.$

9. $\frac{1}{\sqrt{x}} = o(1), x \to \infty.$

10. $\sqrt{x} = o(1), x \to 0.$

Егер функциялардың қандай нүкте маңайында салыстырылып тұрғаны алдын-ала белгілі болып тұрса, онда жоғарыдағы Ландау белгілеулерінде $x \to a$ символын жазбай-ақ қояды.

$f = O(\varphi)$ және $g = O(\varphi)$, $x \to a$, теңдіктерінен әрқашан $f(x) = g(x)$ деп қорытынды жасауға болмайды. Мысалы, $x^2 = O(x), x \to 0$ және $x^3 = O(x), x \to 0$, бірақ $x^2 \neq x^3$. Дәл осылай $f + O(\varphi) = g + O(\varphi)$, $x \to a$, болғанымен $f \neq g$ болуы мүмкін. Мысалы, $x^2 = O(x), x \to 0$, және $x^2 + x^3 = O(x)$, $x \to 0$, бірақ $x^2 \neq x^2 + x^3$. **1-теорема.** Егер $f(x)$ және $g(x)$ функиялары a нүктесінің маңайында эквивалентті және $\lim_{x \to a} f(x)h(x) = \alpha$ шегі бар болса, онда $\lim_{x \to a} g(x)h(x) = \alpha$ шегі де бар.

Дәлелдеу. f және g функциялары эквивалентті болғандықтан

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

және

$$\lim_{x\to a} g(x)h(x)=\lim_{x\to a} f(x)h(x)\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a} f(x)h(x)\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha .$$

Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан шек астында кез-келген көбейткішті (немесе бөлгішті) оған эквивалентті көбейткішпен (немесе бөлгішпен) ауыстыруға болатынын көреміз. Бірақ, жоғарыда атап өткеніміздей, қосылғыштарды оларға эквивалентті функциялармен ауыстыруға болмайды. Мысалы,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

Егер мұнда қосылғыш $\cos x$ функциясын оған эквивалентті 1 фукциясымен ауыстырсақ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x^2}=0.$$

2-теорема. Егер $f=\mathrm{O}(\varphi), g=\mathrm{O}(\psi), x\to a,$ болса, онда

$$f\cdot g=\mathrm{O}(\varphi)\mathrm{O}(\psi)=\mathrm{O}(\varphi\cdot\psi), x\to a$$

Дәлелдеу. $f=\mathrm{O}(\varphi),\ g=\mathrm{O}(\psi)$ болғандықтан, $|f(x)|\le C_1|\varphi(x)|\ \forall x\in \overset{0}{U}{}_E^{\delta_1}(a)$

және $|g(x)|\le C_2|\psi(x)|\ \forall x\in \overset{0}{U}{}_E^{\delta_2}(a)$ болатын $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2$ табылады. Онда

$$\forall x\in \overset{0}{U}{}_E^{\delta}(a)\subset \overset{0}{U}{}_E^{\delta_1}(a)\cap \overset{0}{U}{}_E^{\delta_2}(a)\left(|f\cdot g|\le C_1C_2|\varphi(x)\psi(x)|\right)$$

яғни $fg=\mathrm{O}(\varphi\cdot\psi), x\to a.$ Теорема дәлелденді.

Дәл осылай

$$\mathrm{O}(\varphi)+\mathrm{O}(\varphi)=\mathrm{O}(\varphi),$$

$$o(\varphi)+o(\varphi)=o(\varphi),\quad \mathrm{O}(\varphi)\cdot o(\varphi)=o(\varphi),\quad o(\varphi)\cdot o(\varphi)=o(\varphi),\quad \mathrm{O}(\varphi)+o(\varphi)=\mathrm{O}(\varphi)$$

$$o(\mathrm{O}(\varphi))=\mathrm{O}(\varphi), \mathrm{O}(\mathrm{O}(\varphi))=\mathrm{O}(\varphi), o(o(\varphi))=o(\varphi), \mathrm{O}(o(\varphi))=o(\varphi)$$

теңсіздіктерін де оңай дәлелдеуге болады. Жоғарыдағы мысалдардан

1. $x\sim x+x$

$^2, x \to 0$. **2.** $\sin x \sim x, x \to 0$. **3.** $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \sim e, x \to \infty$. **4.** $\ln(1 + x) \sim x, x \to 0$.

$$\frac{x - \sin x}{} \quad x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right) \quad \left(1 \right) \quad 1$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\quad}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\quad\right)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\quad}{3!} + O(x^2)\right) = \dfrac{\quad}{3!}$

Практикада жиі қолданылатын, кейінірек дәлелденетін

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + O\left(x^{n+1}\right), x \to 0; \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + O\left(x^{2n+2}\right), x \to 0;$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + O\left(x^{2n+5}\right), x \to 0;$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+O\left(x^{n+1}\right),x\to 0;$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O(x^{n+1}),\ x\to 0$$

формулалары элементар функциялар шектерін есептеуде аса күшті құрал болып табылады.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}}-\cos\frac{1}{x}\right)$ шегін есептейік. Мұндағы

$$\frac{x^3+x}{1+x^3}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1}=$$

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^3}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)=1+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),x\to\infty.$$

Ал

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}}=(1+\frac{1}{x^2}+O(\frac{1}{x^2}))^{\frac{1}{7}}=1+\frac{1}{7}\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),x\to\infty.$$

$$\cos\frac{1}{x}=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{x^2}+O(\frac{1}{x^4}),x\to\infty.$$

Бұл екеуінің айырымы

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}}-\cos\frac{1}{x}=\frac{9}{14}\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),x\to\infty.$$

Сонымен,

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{9}{14}\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{9}{14}.$$